ا لمتتاليات العددية

1) المتتاليات العددية

أ- تمهيد

لاحظ جيدا الأعداد ا قيقة التالية : $1;4;7;10;13;15;..;..;..$ أ م

لاحظ جيدا الأعداد ا قيقة التالية : $1;3;9;27;81;..;..$ أ م

نأخذ الآن الأعداد ا تتالية التالية : $4;-1;-4;-7;-10;-13;-16;-19;..............$ و نربط كل عدد من هذه الأعداد بعدد صحيح طبيعي على الشكل التا :

$$\begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & .. & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow .... & \downarrow \\ 4 & -1 & -4 & -7 & -10 & .. & u(n) \end{cases}$$

نقول لقد عرفنا تطبيق u من المجموعة $I=\{0;1;2;3;......n\}$ و $\mathbb{R}$

ب- تعريف

ليكن I جزءا من $\mathbb{N}$

ا تتالية العددية ا عرفة على I هي تطبيق u من I و $\mathbb{R}$ و نرمز ا ب $(u_n)_{n\in I}$ أو (u_n)

- نرمز لصورة n بواسطة u ب u_n عوض $u(n)$
- $u_0;u_1;u_2;.....$ تسمى حدود ا تتالية العددية $(u_n)_{n\in I}$
- u_n يسمى ا د العام للمتتالية العددية $(u_n)_{n\in I}$

ب- مثال

نعتبر ا تتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ا عرفة ب $u_n=2n+1$

احسب u_0 u_1 u_{15}

ا واب

$u_0=2\times0+1=1$ $\quad u_1=2\times1+1=3$ $\quad u_{15}=2\times15+1=31$

2)ا تتاليات ا سابية

أ-تعريف

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية
نقول إن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية إذا وجد عدد حقيقي r حيث $u_{n+1}-u_n=r$ لكل n من $\mathbb{N}$. العدد r
يسمى أساس ا تتالية ا سابية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

مثال

نعتبر ا تتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ا عرفة بحدها العام $u_n=-4n+7$
اثبت أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية حدد أساسها

ا واب

لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا :

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= (-4(n+1)+7)-(-4n+7) \\ &= -4n-4+7+4n-7 \\ &= -4 \end{aligned}$$

إذن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها -4

ب-ا د العام تتالية حسابية

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها r و u_p أحد حدودها ، لدينا لكل n من $\mathbb{N}$:
$u_n=u_p+(n-p)r$

مثال

♦ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها -3 و $u_3=2$
احسب $u_{100};u_{20};u_{10}$

♦ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها r و $u_3=2$ و $u_{13}=5$
احسب r

ا واب

♦

$$\begin{aligned} u_{10} &= u_3+(10-3)r \\ &= 2+7\times(-3) \\ &= -19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{20} &= u_{10}+(20-10)r \\ &= -19+10\times(-3) \\ &= -49 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{100} &= u_3+(100-3)\times r \\ &= 2+97\times(-3) \\ &= 2-291 \\ &= -289 \end{aligned}$$

♦نعلم أن $u_{13}=u_3+(13-3)r$ أي $5=2+10r$ و منه فإن $r=\frac{3}{10}$

ج- موع n حدا متتابعا من متتالية حسابية

نعت متتالية حسابية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. نضع $S_n=u_p+u_{p+1}+u_{p+2}+......+u_{n-1}+u_n$

$S_n=(n-p+1)\frac{(u_p+u_n)}{2}$

رين تطبيقي

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية حدها الأول $u_0=1$ و أساسها $r=\frac{3}{2}$

1- احسب u_{20}

2- احسب الموع $S_1=u_0+u_1+u_2+......+u_{20}$

3- احسب الموع $S_2=u_5+u_6+.......+u_{25}$

ا واب

-1

$$u_{20}=u_0+(20-0)r$$
$$=1+20\times\frac{3}{2}$$
$$=1+30$$
$$=31$$

-2

$$S_1=(20-0+1)\frac{u_0+u_{20}}{2}$$
$$=21\times\frac{1+31}{2}$$
$$=21\times16$$
$$=336$$

3- سب u_5 و u_{25} نستنتج الموع S_2

3)ا تتاليات ا ندسية

أ-تعريف

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية
نقول إن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية إذا وجد عدد حقيقي q حيث $u_{n+1}=qu_n$ لكل n من $\mathbb{N}$. العدد q
يسمى أساس ا تتالية ا ندسية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

مثال

نعتبر ا تتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ا عرفة بحدها العام $u_n=2^n$
اثبت أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية محددا أساسها

ا واب

لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا :
$$u_{n+1}=2^{n+1}=2\times 2^n=2u_n$$
إذن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها 2

ب-ا د العام تتالية هندسية

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها q و u_p أحد حدودها ، لدينا لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n=u_p\times q^{(n-p)}$

مثال

- ♦ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها 2 و $u_3=5$
احسب $u_{25};u_{20};u_7$
- ♦ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها q و $u_{10}=8$ و $u_{13}=64$
احسب q

ا واب

♦ $u_7=u_3\times q^{(7-3)}=5\times 2^4$; $u_{20}=u_3\times q^{(20-3)}=5\times 2^{17}$; $u_{25}=u_3\times q^{(25-3)}=5\times 2^{22}$

♦نعلم أن $u_{13}=u_{10}\times q^{(13-10)}$ أي $64=8\times q^3$ و منه فإن $q^3=8=2^3$ إذن $q=2$

ج- موع n حدا متتابعا من متتالية هندسية

نعت متتالية هندسية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أساسها q $(q\neq 1)$. نضع $S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + ... + u_{n-1} + u_n$ $S_n = u_p \times \left(\frac{1-q^{(n-p+1)}}{1-q}\right)$

رين تطبيقي

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية حدها الأول $u_0 = 135$ و أساسها $q = \frac{1}{3}$

1)احسب الموع S_1 حيث :

$$S_1 = u_0 + u_1 + ... + u_{10} + u_{11}$$

1)احسب الموع S_2 حيث :

$$S_2 = u_5 + u_6 + ... + u_{20}$$

ا واب

-1

$$\begin{aligned} S_1 &= u_0 + u_1 + ... + u_{11} \\ &= u_0 \times \left(\frac{1-q^{(11-0+1)}}{1-q}\right) \\ &= 135 \times \left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{12}}{1-\frac{1}{3}}\right) \\ &= \frac{5\left(3^{12}-1\right)}{2\times 3^{8}} \end{aligned}$$