نهاية دالة عددية

1)نهاية دالة عددية في نقطة x_0

أ-نشاط (نأخذ $x_0 = 0$)

نعتبر الدالةالعددية f المعرفة على IR بما يلي : $f(x) = x^2$ ، والدالة العددية g المعرفة على IR^* بما يلي :
$g(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

اتمم الجدول التالي :

x	-10^{-2}	-10^{-3}	-10^{-4}	0	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}
$f(x)$							
$g(x)$							

الجواب و التحليل

	x (اليسار) →				←		x (اليمين)
x	-10^{-2}	-10^{-3}	-10^{-4}	0	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}
$f(x)$	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}		10^{-8}	10^{-6}	10^{-4}
$g(x)$	10^{4}	10^{6}	10^{8}		10^{8}	10^{6}	10^{4}

- نلاحظ أنه سواء اقتربت x من الصفر على اليمين أو على اليسار فإن العدد $f(x)$ يقترب من الصفر
  نقول إن العدد 0 هو نهاية الدالة f عندما يؤول x إلى الصفر . و نكتب $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$
- نلاحظ أنه سواء اقتربت x من الصفر على اليمين أو على اليسار فإن العدد $g(x)$ يتحول من الأكبر إلى الأكبر أي في اتجاه موجب أي $+\infty$
  نقول أن $+\infty$ هو نهاية الدالة g عندما يؤول x إلى الصفر . و نكتب $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$

2) خاصية

لتكن P و Q دالتان حدوديتان و x_0 عددا حقيقيا .
- $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$
- إذا كان $Q(x_0) \neq 0$ فإن $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$

تمرين تطبيقي

$$\lim_{x\to 1} 3x^2 - 1 ; \lim_{x\to 7} 3x^2 + x + 1 ; \lim_{x\to 0} \frac{2x^5 + 3x - 8}{x+1}$$

الجواب

- $$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} 3x^2 - 1 &= 3(1)^2 - 1 \\ &= 3\times 1 - 1 \\ &= 3 - 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

- $$\lim_{x\to 7} 3x^2+x+1 = 3(7)^2+7+1$$
$$= 3\times 49+7+1$$
$$= 147+8$$
$$= 155$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{2x^5+3x-8}{x+1} = \frac{2(0)^5+3(0)-8}{0+1}$$
$$= \frac{-8}{1}$$
$$= -8$$

3) العمليات على النهايات

نهاية مجموع دالتين

$\lim f$	$\lim g$	$\lim(f+g)$
l	l'	$l+l'$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد

نهاية جداء دالتين

$\lim f$	$\lim g$	$\lim(f\times g)$
l	l'	ll'
$l\ (l\neq 0)$	$-\infty$ أو $+\infty$	$-\infty$ أو $+\infty$
$-\infty$ أو $+\infty$	$l\ (l\neq 0)$	$-\infty$ أو $+\infty$
$-\infty$ أو $+\infty$	$-\infty$ أو $+\infty$	$-\infty$ أو $+\infty$
0	$-\infty$ أو $+\infty$	شكل غير محدد
$-\infty$ أو $+\infty$	0	شكل غير محدد

نهاية خارج دالتين

$\lim f$	$\lim g$	$\lim\left(\frac{f}{g}\right)$
$l\ (l\neq 0)$	0	$-\infty$ أو $+\infty$
$-\infty$ أو $+\infty$	$-\infty$ أو $+\infty$	شكل غير محدد
l	$-\infty$ أو $+\infty$	0
0	0	شكل غير محدد
$-\infty$ أو $+\infty$	l	$-\infty$ أو $+\infty$

تمرين تطبيقي

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} \qquad \lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x-15}{x^2-9} \qquad \lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}$$

الجواب

لدينا $\lim_{x\to 2} x^2-4=4-4=0$ و $\lim_{x\to 2} x-2=2-2=0$ و بما أن الشكل $\frac{0}{0}$ غير محدد وجب علينا تغيير صيغة النسبة $\frac{x^2-4}{x-2}$ أي تبسيطها ما أمكن .

لكل $x\neq 2$:

$$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{x^2-2^2}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}=(x+2)$$

إذن $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$

3) النهاية على اليمين – النهاية على اليسا ر

أ-نشاط:

احسب $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}$

- إذا كان $x\succ 1$ فإن $x-1\succ 0$ وبالتالي $\lim_{\substack{x\to 1\\ x\succ 1}}\frac{1}{x-1}=+\infty$ $\left(\frac{1}{0^+}\to+\infty\right)$ هذه النهاية تسمى النهاية على يمين العدد 1
- إذا كان $x\prec 1$ فإن $x-1\prec 0$ وبالتالي $\lim_{\substack{x\to 1\\ x\succ 1}}\frac{1}{x-1}=-\infty$ $\left(\frac{1}{0^-}\to-\infty\right)$ هذه النهاية تسمى النهاية على يسار العدد 1

ب-تعريف ص112 (مرشدي في الرياضيات)

ج-تمرين

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} x+\frac{1}{x};\lim_{\substack{x\to 0\\ x\prec 0}} x+\frac{1}{x};\lim_{\substack{x\to -2\\ x\succ -2}}\frac{3x-2}{x+2};\lim_{\substack{x\to -2\\ x\prec -2}}\frac{3x-2}{x+2}$$

الجواب :

• $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} x+\frac{1}{x}=+\infty$ (لأن $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} x=0$ و $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} \frac{1}{x}=+\infty$)

• $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\prec 0}} x+\frac{1}{x}=-\infty$ (لأن $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\prec 0}} x=0$ و $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\prec 0}} \frac{1}{x}=-\infty$)

• $\lim_{\substack{x\to -2\\ x\succ -2}} \frac{3x-2}{x+2}=-\infty$ (لأن $\lim_{\substack{x\to -2\\ x\succ -2}} 3x-2=-8$ و $\lim_{\substack{x\to -2\\ x\succ -2}} x+2=0^+$)

• $\lim_{\substack{x\to -2\\ x\prec -2}} \frac{3x-2}{x+2}=+\infty$ (لأن $\lim_{\substack{x\to -2\\ x\prec -2}} 3x-2=-8$ و $\lim_{\substack{x\to -2\\ x\prec -2}} x+2=0^-$)

نهاية دالة في $+\infty$ و $-\infty$

تعاريف (انظر مرشدي في الرياضيات)

مثال1

$\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ (انظر جدول جداء دالتين)

$\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

بصفة عامة $\lim_{x\to+\infty} x^n=+\infty$ $\left(n\in IN^*\right)$

مثال2

$\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ (انظر جدول جداء دالتين)

$\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

بصفة عامة :

• $\lim_{x\to-\infty} x^n=+\infty$ (n عدد صحيح طبيعي زوجي غير منعدم)

• $\lim_{x\to-\infty} x^n=-\infty$ (n عدد صحيح طبيعي فردي غير منعدم)

نهاية دالة حدودية و دالة جذرية في $+\infty$ و $-\infty$

تعاريف (انظر مرشدي في الرياضيات ص 117)

أمثلة:

• $$\lim_{x\to+\infty} x^4+3x^3+1=\lim_{x\to+\infty} x^4$$
$$=+\infty$$

• $$\lim_{x\to-\infty} x-2x^4+x^3+5x^7=\lim_{x\to-\infty} 5x^7$$
$$=-\infty$$

• $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2x+1}{x^5-x^2-x}=\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^5}$$
$$=\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}$$
$$=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^8+2x+1}{x^2-x^5-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^8}{-x^5}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}-x^3$$
$$=-\infty$$