الاشتقاق

العدد المشتق في نقطة

1)نشاط

احسب $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ في كل حالة من الحالات التالية

أ- $f : x \mapsto x + 1$ $\quad x_0 = 1$

ب- $f : x \mapsto x^2 + x$ $\quad x_0 = -2$

ج- $f : x \mapsto \frac{x-1}{2x+1}$ $\quad x_0 = 2$

2)الجواب

أ-

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x + 1 - 2}{x - 1}$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x - 1}$$
$$= 1$$

العددد 1 يسمى العدد المشتق للدالة f في النقطة 1 و نرمز له بالرمز $f'(1)$

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

ب-

$$f'(-2) = \lim_{x \to -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \to -2} \frac{x^2 + x - 2}{x - (-2)}$$
$$= \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x-1)}{x+2}$$
$$= \lim_{x \to -2} x - 1$$
$$= -3$$

بما أن $f'(-2) = -3$ عدد ينتمي إلى $\mathbb{R}$ أي منته فإن f دالة قابلة للاشتقاق في -2

ج-

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{x-1}{2x+1}-\frac{1}{5}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{5x-5-2x-1}{5(2x+1)}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{3x-6}{5(2x+1)}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)}{5(2x+1)}\times\frac{1}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3}{5(2x+1)}$$

$$=\frac{3}{25}$$

3)تعريف

لتكن f دالة عددية و x_0 عددا حقيقيا من مجال ضمن مجموعة تعريفها D_f .

• نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 ، إذا كانت النهاية $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ منتهية.و تسمى هذه النهاية العدد المشتق للدالة f في النقطة x_0 و نرمز له بالرمز $f'(x_0)$.

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

• المعادلة $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ تسمى معادلة المماس لمنحنى الدالة f في النقطة التي أفصولها x_0

4)تمرين تطبيقي

حدد معادلة المماس لمنحنى الدالة f في النقطة التي أفصولها x_0 .

1) $x_0=1; f(x)=x^2+1$

2) $x_0=0; f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x+1$

3) $x_0=2; f(x)=\frac{x-1}{x+2}$

5)الجواب

1) بما أن :

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+1-2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}x+1$$
$$=2$$

فإن معادلة المماس لمنحنى الدالة f في النقطة التي أفصولها 1 هي: $y=f'(1)(x-1)+f(1)$

أي

$y=2(x-1)+2$ أي $y=2x$

2) بما أن :

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x^3-2x+1-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x^3-2x}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x\left(\frac{1}{3}x^2-2\right)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{3}x^2-2$$
$$=-2$$

فإن معادلة المماس لمنحنى الدالة f في النقطة التي أفصولها 0 هي: $y=f'(0)x+f(0)$ أي

$y=-2x+1$

3) بما أن :

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{x-1}{x+2}-\frac{1}{4}}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{4x-4-x-2}{4(x+2)}}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{3x-6}{4(x+2)}}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)}{4(x+2)}\times\frac{1}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{3}{4(x+2)}$$
$$=\frac{3}{16}$$

فإن معادلة المماس لمنحنى الدالة f في النقطة التي أفصولها 2 هي:

$y=f'(2)(x-2)+f(2)$ أي $y=\frac{3}{16}(x-2)+\frac{1}{4}$ أي $y=\frac{3}{16}x-\frac{1}{8}$

6) الدالة المشتقة لبعض الدوال

أتعريف

لتكن f دالة عددية و E مجموعة قابلية اشتقاقها. الدالة التي تربط كل عنصر x من E بعدده المشتق تسمى الدالة المشتقة للدالة f

ب- الدالة المشتقة لبعض الدوال

1) $f:x\mapsto a$ (دالة ثابتة) $f':x\mapsto 0$ (الدالة المشتقة منعدمة)

للبرهان على ذلك نختار عنصر x_0 من مجموعة قابلية اشتقاق الدالة f و نحسب $f'(x_0)$.

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{a-a}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}0$$
$$=0$$

2) $f:x\mapsto kx$ $f':x\mapsto k$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{kx-kx_0}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{k(x-x_0)}{x-x_0} \\ &= k \end{aligned}$$

3) $\left(n\in\mathbb{N}^*\right) f : x \mapsto x^n$	$f' : x \mapsto nx^{n-1}$

يمكنك التأكد من ذلك من أجل $n=2$ و $n=3$ مثلا.

7)العمليات على الدوال المشتقة

الدلة المشتقة	الدالة
$f'+g'$	$f+g$
$\lambda f'$	$(\lambda\in\mathbb{R})\,\lambda f$
$nf^{n-1}\times f'$	$\left(n\in\mathbb{N}^*\right) f^n$
$\dfrac{-f'}{f^2}$	$(f\neq 0)\dfrac{1}{f}$
$\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$	$(g\neq 0)\dfrac{f}{g}$

8) تمرين

حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل من الحالات التالية :

$$f(x)=(x-4)(x+3)$$
$$f(x)=(3x+2)^2(2x+1)$$
$$f(x)=\left(x^2-1\right)^5$$
$$f(x)=\frac{2x+1}{2x-1}$$
$$f(x)=\left(\frac{x^2-1}{x+2}\right)^6$$

الجواب

$$f'(x)=\left[1\times\left(x+3\right)\right]+\left[(x-4)\times1\right]$$
$$=x+3+x-4$$
$$=2x-1$$
$$f'(x)=\left[2(3x+2)\times3\times(2x+1)\right]+\left[(3x+2)^2\times2\right]$$
$$=2(3x+2)\left[3\times(2x+1)+(3x+2)\right]$$
$$=2(3x+2)\left(9x+5\right)$$
$$f'(x)=5\left(x^2-1\right)^4\left(2x\right)$$
$$=10x\left(x^2-1\right)^4$$
$$f'(x)=\frac{2\left(2x-1\right)-2\left(2x+1\right)}{\left(2x-1\right)^2}$$
$$=\frac{4x-2-4x-2}{\left(2x-1\right)^2}$$
$$=\frac{-4}{\left(2x-1\right)^2}$$
$$f(x)=6\left(\frac{x^2-1}{x+2}\right)^5\times\frac{2x\left(x+2\right)-\left(x^2-1\right)}{\left(x+2\right)^2}$$
$$=6\left(\frac{x^2-1}{x+2}\right)^5\times\frac{x^2+4x+1}{\left(x+2\right)^2}$$

9)رتابة دالة و إشارة مشتقتها

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I ضمن مجموعة تعريفها D_f .

أ- تكون الدالة f تزايدية على المجال I إذا وفقط إذا كات لكل عنصر x من المجال I ، $f'(x)\geq0$

ب- تكون الدالة f تناقصية على المجال I إذا وفقط إذا كات لكل عنصر x من المجال I ، $f'(x)\leq0$

ت- تكون الدالة f ثابتة على المجال I إذا وفقط إذا كات لكل عنصر x من المجال I ، $f'(x)=0$

10)تمرين

ادرس رتابة الدالة f انطلاقا من إشارة مشتقتها في كل من الحالات التالية:

$$f(x) = x^2 + 1$$
$$f(x) = -x^2 + 2x + 3$$
$$f(x) = x^3 - 1$$
$$f(x) = \frac{2x-1}{2x-3}$$
$$f(x) = \frac{-2x}{2x-3}$$