

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2008

<u>المادة</u>	: الرياضيات
<u>الشعب</u>	: شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكيها
<u>المعامل</u>	: 7
<u>مدة الإجهاز</u>	: 3 س

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

التمرين الأول (3 نقط) :

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم متعدد منظم مباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقطتين $A(0, -1, 1)$ و $B(1, -1, 0)$ والفلكة (S) التي معادلتها $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z + 2 = 0$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z + 2 = 0$$

1. بين أن مركز الفلكة (S) هي النقطة $(1, 0, 2)$ وأن شعاعها هو $\sqrt{3}$ وتحقق من أن A تتنمي إلى (S). (1.25 ن)

2. حدد مثلاً إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ وبين أن $x + y + z = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (OAB) (1.25 ن)

3. بين أن المستوى (OAB) مماس للفلكة (S) في النقطة A. (0.5 ن)

التمرين 2 (3 نقط) :

1. حل في مجموعة الأعداد العقدية \mathbb{C} المعادلة : $0 = 34 - 6z - z^2$ (1ن)

2. نعتبر ، في المستوى المنسوب إلى المعلم متعدد منظم مباشر $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ، النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي : $a = 3 - 5i$ و $b = 3 + 5i$ و $c = 7 + 3i$. ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' بالابراحة T ذات المتجهة \bar{u} التي لحقها $4-2i$

أ- بين أن $-2i - 4 + z = z'$ ثم تحقق من أن النقطة C هي صورة النقطة A بالإزاحة T. (0.75 ن)

$$\frac{b-c}{a-c} = 2i \quad . \quad (0.5 \text{ ن})$$

ب- بين أن $AC = 2 BC$ (0.75 ن)

التمرين 3 (3 نقط) :

يحتوي صندوق على ست كرات حمراء وثلاث كرات خضراء (لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس).

1. نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاثة كرات في الصندوق.

أ- احسب احتمال الحصول على كرتين حمراوين وكرة خضراء. (1ن)

$$\text{ب- بین احتمال الحصول على کرة خضراء واحده على الاقل هو : } \frac{16}{21} \quad (1\text{ن})$$

2. نعتبر في هذا السؤال التجربة التالية: نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال ثلاثة كرات من الصندوق . احسب احتمال الحصول على ثلاثة كرات حمراء. (1ن)

مسألة (3 نقط) :

I- لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $[0, +\infty]$ بما يلي :

$$g(x)x - 2 \ln x \quad . \quad (0.5 \text{ ن})$$

أ- احسب $(x)' g$ لكل x من المجال $[0, +\infty]$.

- ب - بين أن g تناقصية على $[0, 2]$ وتزايدية على $[2, +\infty)$ (ن) .
2. استنتج أن $0 > g(x)$ لكل من x المجال $[0, +\infty)$ (لاحظ أن $g(2) > 0$) (ن) .

II نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0, +\infty)$ بما يلي :
 ليكن (γ) لمنحنى الممثل للدالة f في معلم متعدد (O, \vec{i}, \vec{j})

1. احسب $\lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ x > 0}} f(x)$ وأول النتيجة هندسيا. (ن) .

2. أ - بين أن : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$ (يمكنك وضع $t = \sqrt{x}$. نذكر أن : $0 < \ln x^2 = 2 \ln x$) (ن) .

ب. استنتاج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ وأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ (لاحظ أن : $f(x) = x \left(1 - \frac{(\ln x)^2}{x}\right)$) (ن) .

ج- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$ ثم استنتاج أن المحنى (γ) يقبل ، بجوار $+ \infty$ ، فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم الذي معادلته (Δ) . (ن) .

د- بين أن المحنى (γ) يوجد تحت المستقيم (Δ) . (ن) .

3. أ - بين أن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ لكل x من $[0, +\infty)$ وبين أن f تزايدية قطعا على $[0, +\infty)$. (ن) .

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f . (ن) .

ج- بين أن $x = y$ هي معادلة ديكارتية لمماس المحنى (γ) في النقطة التي أقصولها 1. (ن) .

4. بين أن المعادلة تقبل حلان وحيدان $f(x) = 0$ في α وأن $\alpha < \frac{1}{2} < \frac{1}{e}$ (ن قبل أن $\frac{1}{2} < (\ln 2)^2$) (ن) .

5. أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (γ) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) (ن قبل أن $I(e, e-1)$ نقطة انعطاف للمنحنى (γ) ونأخذ $e \approx 2.7$) . (ن) .

6. أ - بين أن $x \mapsto H(x) = x \ln x - x$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على المجال $[0, +\infty)$.

ثم بين أن : $\int_1^e \ln x \, dx = 1$ (ن) .

ب- باستعمال متكاملة بالأجزاء ، بين أن : $\int_1^e (\ln x)^2 \, dx = e - 2$ (ن) .

ج- احسب مساحة حيز المستوى المحصور بين المحنى (γ) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتها $x = 1$ و $x = e$. (ن) .

III - نعتبر المتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من \mathbb{N} .

1. بين أن $2 \leq u_n \leq 1$ لكل n من \mathbb{N} (يمكنك استعمال نتيجة السؤال II) . (ن) .

2. بين أن المتالية (u_n) تناقصية. (ن) .

3. استنتاج أن (u_n) متقاربة ثم حدد نهايتها. (ن) .