الرياضيات

التمرين الأول:

1) نحسب إحداثيات المتجهة $\vec{OC}\wedge\vec{OD}$:

لدينا: $\vec{OD}(x_D-x_O, y_D-y_O, z_D-z_O)$ و $\vec{OC}(x_C-x_O, y_C-y_O, z_C-z_O)$

ومنه: $\vec{OD}(0,1,-1)$ و $\vec{OC}(2,-1,0)$

$$\vec{OC}\wedge\vec{OD}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\vec{OC}\wedge\vec{OD}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$$

$$\vec{OC}\wedge\vec{OD}=(1,2,2)$$

لدينا: $\vec{OC}\wedge\vec{OD}$ متجهة منظمية على المستوى (OCD)،

ولدينا: $O(0,0,0)$ نقطة تنتمي إلى المستوى (OCD)

ومنه فإن: $x+2y+2z+d=0$

أي: $0+0+0+d=0$

وبالتالي: $d=0$

إذن: معادلة ديكارتية للمستوى (OCD) هي: $x+2y+2z=0$،

2) لدينا: (S) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\vec{MA}\cdot\vec{MB}=0$

ولدينا: $\vec{MA}(x_A-x; y_A-y; z_A-z)$ و $\vec{MB}(x_B-x; y_B-y; z_B-z)$

أي:
$$\vec{MA}\cdot\vec{MB}=(x_A-x)(x_B-x)+(y_A-y)(y_B-y)+(z_A-z)(z_B-z)=0$$
$$=x_Ax_B-xx_A-xx_B+x^2+y_Ay_B-y_Ay-y_By+y^2+z_Az_B-z_Az-z_Bz+z^2=0$$
$$=x^2+y^2+z^2+x(-x_A-x_B)+y(-y_A-y_B)+z(-z_A-z_B)+x_Ax_B+y_Ay_B+z_Az_B=0$$
$$=x^2+y^2+z^2+x(2-6)+y(-2-6)+z(-8-0)-12+12+8\times0=0$$
$$=x^2-4x+y^2-8y+z^2-8z=0$$
$$=(x-2)^2+(y-4)^2+(z-4)^2-4-16-16=0$$
$$=(x-2)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=36$$

إذن: (S) هي الفلكة التي مركزها $\Omega(2,4,4)$ وشعاعها $r=\sqrt{36}=6$

③ أ - المسافة بين Ω و (OCD).

$$d(\Omega,(OCD))=\frac{|2\times1+2\times4+4\times2|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{18}{\sqrt{9}}=6$$

ب - لدينا، $d=6=R$

إذن : المستوى (OCD) مماس للفلكة (S).

٤ - $\vec{OA}\cdot\vec{OB}=-2\times6+6\times2+0+8=-12+12+0=0$

لدينا، (S) هي الفلكة التي مركزها Ω وشعاعها 6،

وهي مجموعة النقط التي تحقق $\vec{\Pi A}\cdot\vec{\Pi B}=0$

ولدينا، $\vec{OA}\cdot\vec{OB}=0$ ومعناه O تنتمي إلى الفلكة (S)

و O توجد ضمن المستوى (OCD)

إذن، O هي نقطة تماس الفلكة (S) والمستوى (OCD)

التمرين الثاني

① الكتابة على الشكل المثلثي للعددين هو :

$a=2-2i$

$r_a=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$a=2\sqrt{2}\left(\frac{2}{2\sqrt{2}}-i\frac{2}{2\sqrt{2}}\right)$

$a=2\sqrt{2}\left(\cos-\frac{\pi}{4}+i\sin-\frac{\pi}{4}\right)$

$a=\left[2\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right]$

$b=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

$r_b=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$

$b=1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)$

$b=1\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

$b=\left[1,\frac{5\pi}{6}\right]$

② أ - لدينا. R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{5\pi}{6}$:

ونعلم أن الصيغة العقدية للدوران هي. $z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)$

أي $z'=e^{i\theta}(z-\omega)+\omega$

ومنه $z'=e^{i\frac{5\pi}{6}}(z-z_O)+z_O$

وبالتالي، $z'=\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)z$

إذن! $z'=bz$

ب - C هي صورة A بالدوران R

أي أن، $z_C=bz_A$

$z_C=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(2-2i)$

إذا $z_C = -2\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times 2i + \frac{1}{2}\times 2i - \frac{1}{2}i\times 2i$

$z_C = -\sqrt{3} + i\sqrt{3} + i + 1$

$z_C = (1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})$

إذن C صورة A بالدوران R.

3- لدينا $z_C = b\, z_A$

أي أن $z_C = [1, \frac{5\pi}{6}]\times[2\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}]$

وبالتالي $z_C = [1\times 2\sqrt{2}, \frac{5\pi}{6} + (-\frac{\pi}{4})]$

إذن $\arg c = \arg a + \arg b$

ومنه $\arg c = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4}$

أي $\arg c \equiv \frac{7\pi}{12} [2\pi]$

التمرين الثالث :

$3B, 4N, 5R$

1- احتمال الحدث A: 3 كرات من نفس اللون.

$3B$ أو $3N$ أو $3R$

$$P(A) = \frac{C_3^3 + C_4^3 + C_5^3}{C_{12}^3} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$$

• احتمال الحدث B: 3 كرات مختلفة اللون مثنى مثنى.

$1B$ و $1N$ و $1R$

$$P(B) = \frac{C_3^1\times C_5^1\times C_4^1}{C_{12}^3} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$$

2- X المتغير الذي يربط كل سحبة بعدد الألوان التي تحملها.

أ- $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$

ب- قانون الاحتمال

$3B$ أو $3N$ أو $3R$

$$P(X=1) = \frac{C_3^3 + C_4^3 + C_5^3}{C_{12}^3} = \frac{3}{44}$$

$2B, 1\bar{B}$ أو $2N, 1\bar{N}$ أو $2R, 1\bar{R}$

$$P(X=2) = \frac{C_3^2\times C_9^1 + C_4^2\times C_8^1 + C_5^2\times C_7^1}{C_{12}^3} = \frac{145}{220} = \frac{29}{44}$$

$1B$ و $1R$ و $1N$

$$P(X=3) = \frac{C_3^1\times C_4^1\times C_5^1}{C_{12}^3} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$$

x	1	2	3
$P(X=x_i)$	$3/44$	$29/44$	$3/11$

الأمل الرياضي

$$E(X) = \frac{3}{44}\times 1 + 2\times\frac{29}{44} + \frac{3}{11}\times 3$$

$$E(X) = \frac{3}{44} + \frac{58}{44} + \frac{36}{44}$$

$$E(X) = \frac{97}{44}$$

التمرين الرابع :

1) أ- نتحقق من أن $\frac{x}{x+3} = 1 - \frac{3}{x+3}$ لكل x من

$$1 - \frac{3}{x+3} = \frac{x+3-3}{x+3} = \frac{x}{x+3}$$

ب-

$$I = \int_{-2}^{-1} \frac{x}{x+3}\,dx = \int_{-2}^{-1} 1 - \frac{3}{x+3}\,dx$$

$$= \left[x - 3\ln|x+3|\right]_{-2}^{-1}$$

$$= -1 - 3\ln|2| + 2 - \ln|1|$$

$$= 1 - 3\ln(2)$$ ومنه

2)

$$J = \int_{-2}^{-1} \ln(2x+6)\,dx$$

ليكن ،

$$u(x) = \ln(2x+6) \longrightarrow u'(x) = \frac{2}{2x+6}$$

و

$$v'(x) = 1 \longrightarrow v(x) = x$$

ومنه ،

$$J = \left[x\ln(2x+6)\right]_{-2}^{-1} - \int_{-2}^{-1} x\times\frac{2}{2x+6}\,dx$$

$$J = \left[x\ln(2x+6)\right]_{-2}^{-1} - \int_{-2}^{-1} x\times\frac{2}{2(x+3)}\,dx$$

$$J = \left[x\ln(2x+6)\right]_{-2}^{-1} - \int_{-2}^{-1}\frac{x}{x+3}\,dx$$

$$J = -\ln(4) + 2\ln(2) - I$$

$$J = -\ln(4) + \ln(4) - I$$

$$J = -I$$ إذن

لدينا ، $f(x)=2\ln(e^x-2\sqrt{e^x}+2)$

I)

1) لنتحقق من أن ، $e^x-2\sqrt{e^x}+2=(\sqrt{e^x}-1)^2+1$

لدينا $(\sqrt{e^x}-1)^2+1=(\sqrt{e^x})^2-2\sqrt{e^x}+1+1$

$=e^x-2\sqrt{e^x}+2$

لدينا ، $f(x)=2\ln(e^x-2\sqrt{e^x}+2)$

$D_f=\{x/x\in\mathbb{R} ; e^x-2\sqrt{e^x}+2>0\}$

$D_f=\{x/x\in\mathbb{R} ; (\sqrt{e^x}-1)^2+1>0\}$

لدينا ، $(\sqrt{e^x}-1)^2+1=0$

$(\sqrt{e^x}-1)^2=-1$

وهذا لا يمكن ، إذن $(\sqrt{e^x}-1)^2+1>0$

ومنه فإن $D_f=\mathbb{R}$

لدينا ، $1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}=\frac{e^x-2\sqrt{e^x}+2}{e^x}$

أي $=\frac{e^x-2\sqrt{e^x}+2}{e^x}=0$

ومنه فإن ، $\frac{(\sqrt{e^x}-1)^2+1}{e^x}=0$

لدينا $e^x>0$.

وبالتالي $(\sqrt{e^x}-1)^2+1=0$

لدينا ، $(\sqrt{e^x}-1)^2+1>0$

إذن $\frac{(\sqrt{e^x}-1)^2+1}{e^x}>0$

ومنه فإن ، $1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}>0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} 2\ln\left[\left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1\right]$$

لدينا، $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

ومنه، $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right)$$

لدينا. $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

ومنه. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2\ln 2 = \ln 4$

إذن. $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مقارب أفقي بجوار $-\infty$ معادلته $y = \ln 4$.

3) أ- الدالة المشتقة

لدينا $f(x) = 2\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right)$

وبالتالي $f'(x) = \dfrac{2\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right)'}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2}$

ومنه، $f'(x) = \dfrac{2\left(e^x - 2\dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x}}\right)}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2}$

أي، $f'(x) = \dfrac{2\left(\dfrac{e^x\sqrt{e^x} - e^x}{\sqrt{e^x}}\right)}{\left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1}$

ومنه، $f'(x) = \dfrac{2e^x\left(\sqrt{e^x} - 1\right)}{\left[\left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1\right]\sqrt{e^x}}$

إذن، $f'(x) = \dfrac{2\left(\sqrt{e^x}\right)^2\left(\sqrt{e^x} - 1\right)}{\sqrt{e^x}\left[\left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1\right]}$

وبالتالي، $f'(x) = \dfrac{2\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x} - 1\right)}{\left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1}$

لدينا $f'(0) = \dfrac{2\sqrt{e^0}\left(\sqrt{e^0} - 1\right)}{\left(\sqrt{e^0} - 1\right)^2 + 1} = \dfrac{2\times 0}{1} = 0$.

ب - إشارة $\sqrt{e^x}-1$

لدينا

$$\sqrt{e^x}-1$$
$$\sqrt{e^x}-1=0$$
$$\sqrt{e^x}=1$$
$$e^{\frac{1}{2}x}=1$$
$$\ln e^{\frac{1}{2}x}=\ln 1$$
$$\frac{1}{2}x=0$$
$$x=0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\sqrt{e^x}-1$		$-$	0	$+$	

لدينا $2\sqrt{e^x}>0$ و $(\sqrt{e^x}+1)^2+1>0$

ومنه فإن إشارة f' هي إشارة $(\sqrt{e^x}-1)$.

لدينا، $f'(x)\geq 0$ على المجال $[0,+\infty[$

إذن: f تزايدية على المجال $[0,+\infty[$.

ولدينا، $f'(x)\leq 0$ على المجال $]-\infty,0]$

إذن f تناقصية على المجال $]-\infty,0]$.

4) أ - لنتحقق من أن $f(x)=2x+2\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)$

$$2x+2\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)=2x+2\ln\left(\frac{e^x-2\sqrt{e^x}+2}{e^x}\right)$$
$$=2x+2\ln(e^x-2\sqrt{e^x}+2)-2\ln e^x$$
$$=2x+2\ln(e^x-2\sqrt{e^x}+2)-2x$$
$$=2\ln(e^x-2\sqrt{e^x}+2)=f(x)$$

إذن $f(x)=2x+2\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)$

ب - يكون $(D): y=2x$ مقارب مائل لـ $(\mathcal{C})$ بجوار $+\infty$،

إذا وفقط إذا كان $\lim_{x\to+\infty} f(x)-2x=0$

ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x)-2x=\lim_{x\to+\infty} 2\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$.

ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x)-2x = 2\ln 1 = 0$

إذن $(D): y=2x$ مقارب مائل لـ C_f بجوار $+\infty$.

5) أ- نتحقق من أن $e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x}-1)(\sqrt{e^x}-2)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

لدينا $(\sqrt{e^x}-1)(\sqrt{e^x}-2) = (\sqrt{e^x})^2 - 2\sqrt{e^x} - \sqrt{e^x} + 2$

$= e^x - 3\sqrt{e^x} + 2$

ب- ندرس إشارة $\sqrt{e^x} - 2$

$\sqrt{e^x} - 2 = 0$

$\sqrt{e^x} = 2$

$e^{\frac{1}{2}x} = 2$

$\ln e^{\frac{1}{2}x} = \ln 2$

$\frac{1}{2}x = \ln 2$

$x = 2\ln 2$

$x = \ln 4$

x	$-\infty$		$\ln 4$		$+\infty$
$\sqrt{e^x}-2$		$-$	0	$+$	

• إشارة $(\sqrt{e^x}-1)(\sqrt{e^x}-2)$

x		0		$\ln 4$		$+\infty$
$(\sqrt{e^x}-1)(\sqrt{e^x}-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$	

ج- لدينا $\forall x \in [0, \ln 4]$ $e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 \leq 0$

أي $\forall x \in [0, \ln 4]$ $e^x - 2\sqrt{e^x} - \sqrt{e^x} + 2 \leq 0$

ومنه $\forall x \in [0, \ln 4]$ $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \leq \sqrt{e^x}$

د- لدينا $\forall x \in [0, \ln 4]$ $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \leq \sqrt{e^x}$

$2\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) \leq 2\ln(\sqrt{e^x})$

$2\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) \leq 2\ln e^{\frac{1}{2}x}$

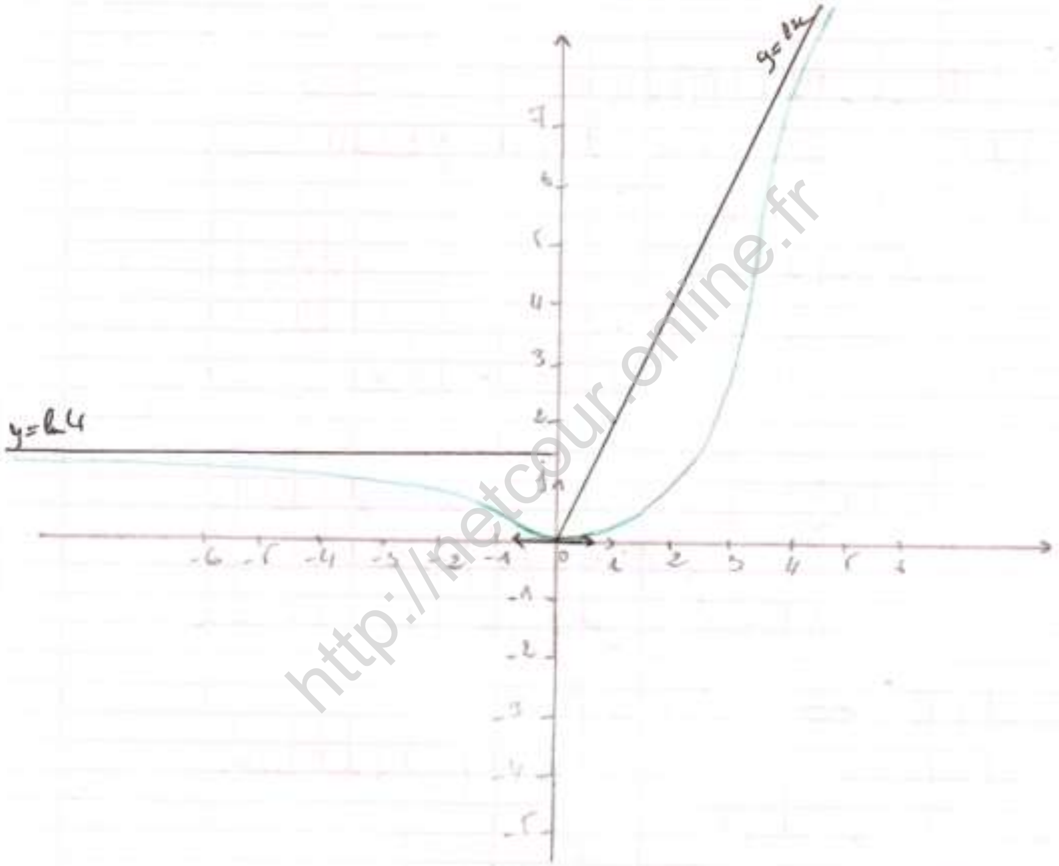
$2\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) \leq 2 \times \frac{1}{2}x$

إذن $\forall x \in [0, \ln 4]$ $f(x) \leq x$

ج) المنحنى :

- جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\ln 4$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



II) لدينا $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

3) لنبين أن $0 \leq u_n \leq \ln 4$ $\forall n \in \mathbb{N}$

- من أجل : $n=0$ لدينا $0 \leq u_0 = 1 \leq \ln 4$
- نفترض أن $0 \leq u_n \leq \ln 4$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- ولنبين أن $0 \leq u_{n+1} \leq \ln 4$ $\forall n \in \mathbb{N}$

لدينا، $f(\ln 4) = \ln 4$ و $f(0) = 0$

ولدينا f دالة تزايدية قطعا على المجال $[0, +\infty[$.

وإن لدينا، $0 \leq U_n \leq \ln 4$

أي أن: $f(0) \leq f(U_n) \leq f(\ln 4)$

ومنه $0 \leq U_{n+1} \leq \ln 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

إذن: حسب البرهان بالترجع فإن $0 \leq U_n \leq \ln 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) (U_n) تناقصية،

لدينا، $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n$

وحسب السؤال (الجزء I 5 د) لدينا، $\forall x \in [0, \ln 4]\ f(x) \leq x$

أي $\forall x \in [0, \ln 4]\ f(x) - x \leq 0$

إذن، $f(U_n) - U_n \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ومنه، $U_{n+1} - U_n \leq 0$

إذن U_n متتالية تناقصية

3) لدينا، U_n تناقصية ومصغورة بـ 0.

ولدينا، f دالة متصلة على المجال $[0, \ln 4]$

و $f([0, \ln 4]) = [0, \ln 4]$

ومنه فإن، نهاية U_n هي حل: $f(\ell) = \ell$

$$f(\ell) = \ell \iff f(\ell) - \ell = 0$$

وحسب السؤال (5، ب) لدينا، $f(x) - x = 0$

$x_1 = \ln 4$ و $x_2 = 0$

وبما أن U_n تناقصية ومصغورة بـ 0.

فإن، $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$