تحويلات في المستوى

القدرات المنتظرة
-* التعرف على تقايس وتشابه الأشكال استعمال الإزاحة و التحاكي والتماثل.
-* استعمال الإزاحة و التحاكي و التماثل في حل مسائل هندسية.

I – التماثل المحوري – التماثل المركزي – الإزاحة

1-أنشطة:

ليكن $ABCD$ معين مركزه O ، و I و J منتصفي $[AB]$ و $[AD]$

1- أنشئ الشكل
2- حدد مماثلة كل من A و B و O بالنسبة للنقطة O على التوالي استنتج مماثل (AB) بالنسبة لـ O
3- حدد مماثلة كل من B و O و I بالنسبة للمستقيم (AC) على التوالي استنتج مماثل (IO) بالنسبة لـ(AC)
4- حدد صورة A بالازاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{BC}$
حدد صورة B بالازاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{IJ}$
حدد صورة $[BO]$ بالازاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{IJ}$

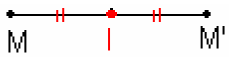
2- تعاريف و مصطلحات

أ- المماثل المركزي

لتكن I نقطة معلومة و M و M' نقطتين من المستوى
* نقول إن النقطة M' هي مماثلة النقطة M بالنسبة للنقطة I اذا و فقط اذا تحقق ما يلي:
- إذا كان $M = I$ فان $M' = I$
- إذا كان $M \neq I$ فان I منتصف $[MM']$

* العلاقة التي تربط كل نقطة M من المستوى (P) بمماثلتها M' بالنسبة للنقطة I تسمى التماثل المركزي الذي مركزه I نرمز له بالرمز S_I
نقول إن النقطة M' صورة M بالتماثل المركزي S_I نكتب $S_I(M) = M'$ أو $S_I : M \to M'$
نقول كذلك إن S_I يحول M إلى M' لذا نقول إن التماثل المركزي S_I تحويل في المستوى.

ملاحظات:



* $S_I(M) = M'$ تكافئ $\overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM}$
* $S_I(I) = I$
* $S_I(M) = M'$ تكافئ $S_I(M') = M$

ب- المماثل المحوري

ليكن (D) مستقيما و M و M' نقطتين من المستوى
* نقول إن النقطة M' هي مماثلة النقطة M بالنسبة للمستقيم(D) إذا و فقط إذا تحقق ما يلي:
- إذا كان $M \in (D)$ فان $M' = M$
- إذا كان $M \notin (D)$ فان (D) واسط $[MM']$

* العلاقة التي تربط كل نقطة M من المستوى(P) بمماثلتهاM' بالنسبة للمستقيم(D) تسمى التماثل المحوري الذي محوره (D) نرمز له بالرمز $S_{(D)}$
نقول إن النقطة M' صورة M بالتماثل المحوري $S_{(D)}$ نكتب $S_{(D)}(M) = M'$ أو $S_{(D)} : M \to M'$
نقول كذلك إن $S_{(D)}$ يحول M إلى M' لذا نقول إن التماثل المحوري $S_{(D)}$ تحويل في المستوى.

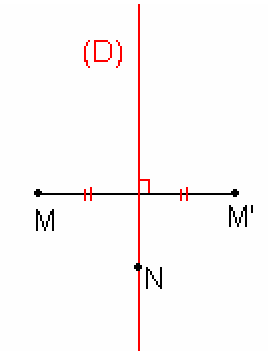
ملاحظة:

* $S_{(D)}(M)=M'$ يكافئ (D) واسط $[MM']$

* لكل نقطة N من (D) : $S_{(D)}(N)=N$

نقول إن جميع نقط المستقيم (D) صامدة بالتماثل المحوري $S_{(D)}$

* $S_{(D)}(M)=M'$ تكافئ $S_{(D)}(M')=M$



ب- الإزاحة

ليكن $\vec{u}$ متجهة و M و M' نقطتين من المستوى

* نقول إن النقطة M' صورة M بالازاحة ذات المتجهة $\vec{u}$ إذا و فقط إذا $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$

* العلاقة التي تربط كل نقطة M من المستوى (P) بصورتها M' بالازاحة ذا المتجهة $\vec{u}$ تسمى الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$ نرمز لها $t_{\vec{u}}$

نكتب $t_{\vec{u}}(M)=M'$ أو $t_{\vec{u}}:M\to M'$

نقول كذلك إن $t_{\vec{u}}$ يحول M إلى M' لذا نقول إن الإزاحة $t_{\vec{u}}$ تحويل في المستوى.

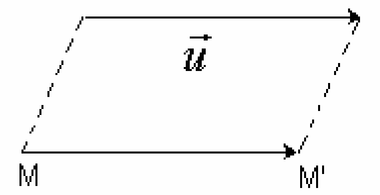
ملاحظة:

* $t_{\vec{u}}(M)=M'$ يكافئ $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$

* $t_{\overrightarrow{AB}}(A)=B$ لكل M من المستوى $t_{\vec{O}}(M)=M$

* $t_{\vec{u}}(M)=M$ تكافئ $\overrightarrow{MM}=\vec{0}$

* $t_{\vec{u}}(M)=M'$ يكافئ $t_{-\vec{u}}(M')=M$



2- الخاصية المميزة للإزاحة

-* لتكن M و N و M' و N' نقط من المستوى (P) حيث $t_{\vec{u}}(N)=N'$; $t_{\vec{u}}(M)=M'$

ومنه $\overrightarrow{NN'}=\vec{u}$; $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$ و بالتالي $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{NN'}$ إذن $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{M'N'}$

إذا كان $t_{\vec{u}}(M)=M'$ و $t_{\vec{u}}(N)=N'$ فان $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{M'N'}$

-* ليكن T التحويل حيث لكل نقطتين M و N من المستوى حيث $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{M'N'}$ و $T(N)=N'$; $T(M)=M'$

نحدد طبيعة T

لتكن A نقطة معلومة و M نقطة ما من المستوى

لنعتبر $T(A)=A'$

$T(M)=M'$ تكافئ $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{M'A'}$

تكافئ $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AA'}$

تكافئ $t_{\overrightarrow{AA'}}(M)=M'$

إذن $T=t_{\overrightarrow{AA'}}$

الخاصية المميزة

ليكن T تحويل في المستوى

يكون T إزاحة إذا و فقط إذا كانت T تحول كل نقطتين M و N من المستوى إلى نقطتين M' و N' حيث $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{M'N'}$

3- الاستقامية و التحويلات

نشاط

لتكن A ; B ; C ; D نقط من المستوى حيث $\overrightarrow{CD}=\alpha\overrightarrow{AB}$. نعتبر A' ; B' ; C' ; D' صورها على التوالي بتحويل T

بين أن $\overrightarrow{C'D'}=\alpha\overrightarrow{A'B'}$ في الحالتين $T=t_{\vec{u}}$ و $T=S_{\Omega}$

*- الحالة $T = t_{\vec{u}}$

$T(A)=A'$; $T(B)=B'$ ومنه $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$

$T(C)=C'$; $T(D)=D'$ ومنه $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{C'D'}$

وحيث أن $\overrightarrow{CD}=\alpha\overrightarrow{AB}$ فان $\overrightarrow{C'D'}=\alpha\overrightarrow{A'B'}$

*- الحالة $T = S_{\Omega}$

$T(A)=A'$; $T(B)=B'$ ومنه $\overrightarrow{\Omega B}=-\overrightarrow{\Omega B'}$ و $\overrightarrow{\Omega A}=-\overrightarrow{\Omega A'}$ و بالتالي $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{A'B'}$

$T(C)=C'$; $T(D)=D'$ ومنه $\overrightarrow{\Omega C}=-\overrightarrow{\Omega C'}$ و $\overrightarrow{\Omega D}=-\overrightarrow{\Omega D'}$ و بالتالي $\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{C'D'}$

وحيث أن $\overrightarrow{CD}=\alpha\overrightarrow{AB}$ فان $\overrightarrow{C'D'}=\alpha\overrightarrow{A'B'}$

نقبل الحالة $T = S_{(D)}$

خاصية

ليكن T أحد التحويلات التالية : الإزاحة –التماثل المركزي – التماثل المحوري A ; B ; C ; D نقط من المستوى إذا كان T يحول النقط A ; B ; C ; D بالتوالي إلى النقط A' ; B' ; C' ; D' حيث $\overrightarrow{CD}=\alpha\overrightarrow{AB}$ فان $\overrightarrow{C'D'}=\alpha\overrightarrow{A'B'}$ نعبر عن هذا بقولنا الإزاحة و التماثل المركزي و التماثل المحوري تحويلات تحافظ على معامل استقامية متجهتين

نتيجة

ليكن T أحد التحويلات التالية : الإزاحة –التماثل المركزي – التماثل المحوري

A ; B ; C نقط مستقيمية حيث $A\neq B$ ومنه يوجد α حيث $\overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{AB}$

A' ; B' ; C' صورها بالتحويل T ومنه $\overrightarrow{A'C'}=\alpha\overrightarrow{A'B'}$

اذن A' ; B' ; C' مستقيمية.

الإزاحة و التماثل المركزي و التماثل المحوري تحافظ على استقامية النقط

4- التحويل و المسافات

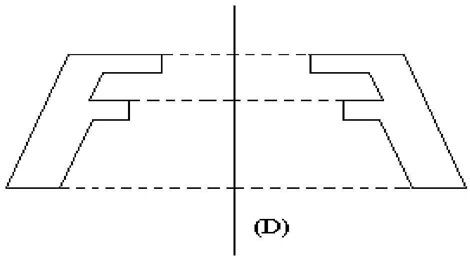
خاصية

الإزاحة و التماثل المركزي و التماثل المحوري تحويلات تحافظ على المسافة أي إذا كان A' و B' صورتي A و B بأحد هذه التحويلات فان $AB=A'B'$

5- صورة أشكال بتحويل: الإزاحة –التماثل المركزي – التماثل المحوري

أ- أنشطة

أنشئ صورة الشكل (F) بالتحويلات الإزاحة و التماثل المركزي و التماثل المحوري



....

تعريف

ليكن (F) شكلا مجموعة صور نقط الشكل (F) بتحويل T تكون شكلا (F') يسمى صورة شكل (F) بالتحويل T نكتب $T((F))=(F')$

خاصية

صورة تقاطع شكلين (F_1) و (F_2) بتحويل T هو تقاطع (F_1') و (F_2') صورتي هذين الشكلين بهذا التحويل $T((F_1)\cap(F_2))=T((F_1))\cap T((F_2))$

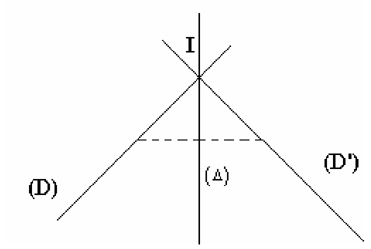
ب- صور أشكال اعتيادية بتحويل
صورة مستقيم – صورة نصف مستقيم – صورة قطعة

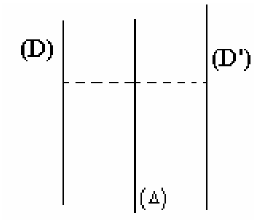
ليكن T أحد التحويلات التالية : الإزاحة –التماثل المركزي – التماثل المحوري
اذا كان $T(A)=A'$ و $T(B)=B'$ فان $T((AB))=(A'B')$ و $T([AB))=[A'B')$ و $T([AB])=[A'B']$

أ- صورة مستقيم

-* صورة مستقيم (D) بتماثل محوري $S_{(\Delta)}$ هو مستقيم (D')

+ إذا كان (D) يقطع (Δ) في نقطة I فان (D') يقطع (Δ) في نقطة I

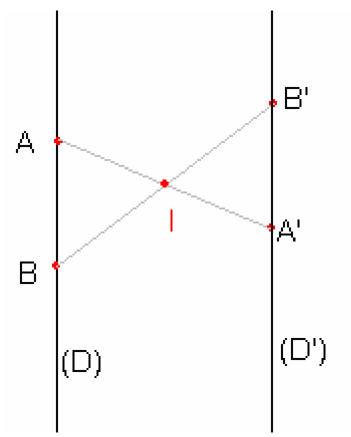


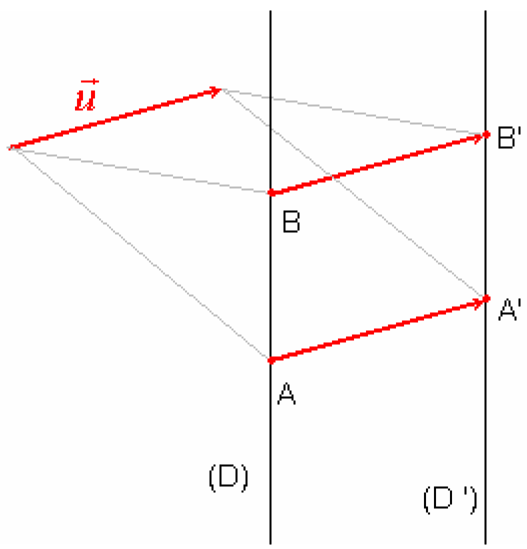


+ إذا كان $(D)//(\Delta)$ فان $(D')//(\Delta)$

+ إذا كان $(\mathrm{D})\perp(\Delta)$ فان $(D)=(D')$

-* صورة مستقيم (D) بإزاحة أو تماثل مركزي هو مستقيم (D') يوازيه



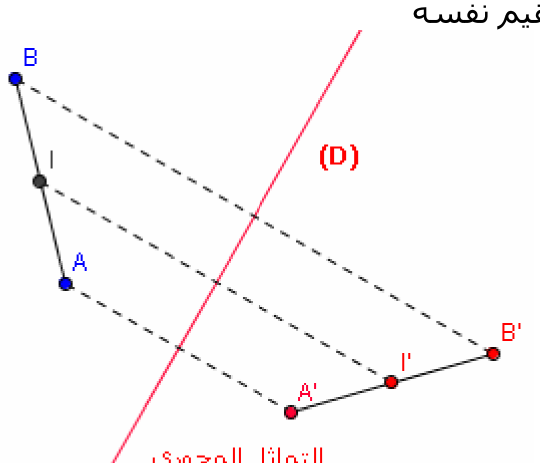


ملاحظة

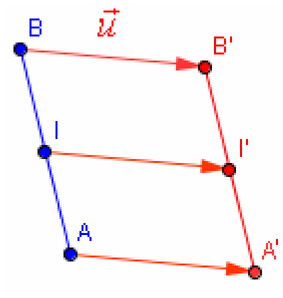
-* صورة مستقيم (D) بتماثل مركزي مركزه ينتمي إلى (D) هو المستقيم نفسه

-* صورة مستقيم (D) بإزاحة متجهتها موجهة لـ (D) هو المستقيم نفسه

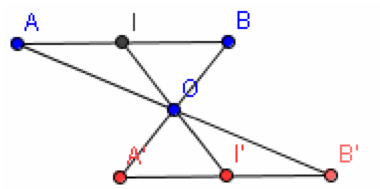
ب- صورة منتصف قطعة



التماثل المحوري



الازاحة



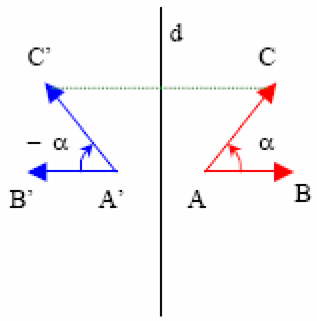
التماثل المركزي

ليكن T أحد التحويلات التالية : الإزاحة –التماثل المركزي – التماثل المحوري
إذا كان I منتصف $[AB]$ و $T(A)=A'$ و $T(B)=B'$ و $T(I)=I'$ فان I' منتصف $[A'B']$

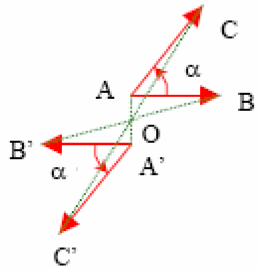
ج- صورة دائرة

صورة دائرة مركزها O و شعاعها r بإزاحة أو تماثل محوري أو تماثل مركزي هو دائرة مركزها O' صورة O و شعاعها r

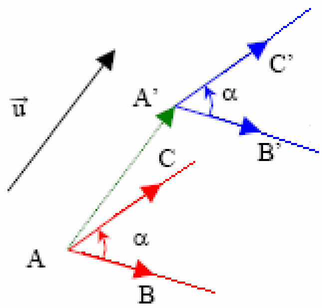
د- صورة زاوية



التماثل المحوري



التماثل المركزي



الازاحة

ليكن T أحد التحويلات التالية : الإزاحة –التماثل المركزي – التماثل المحوري
إذا كان $T(A)=A'$ و $T(B)=B'$ و $T(C)=C'$ فان $T\left(\widehat{BAC}\right)=\widehat{B'A'C'}$ و $\widehat{BAC}=\widehat{B'A'C'}$
الإزاحة و التماثل المركزي و التماثل المحوري تحافظ على قياس الزوايا الهندسية

6- صورة مثلث

ليكن T أحد التحويلات التالية : الإزاحة –التماثل المركزي – التماثل المحوري
إذا كان $T(A)=A'$ و $T(B)=B'$ و $T(C)=C'$ فان صورة المثلث ABC هو المثلث $A'B'C'$ الذي يقايسه

7- التحويلات و التوازي و التعامد

خاصية

الإزاحة التماثل المركزي و التماثل المحوري تحويلات تحافظ على التعامد و التوازي

8- محاور تماثل شكل – مراكز تماثل شكل

أ- تعريف

نقول إن المستقيم (D) محور تماثل شكل (F) إذا و فقط إذا كان $S_{(D)}\left((F)\right)=(F)$

أمثلة

+ محاور تماثل مستقيم هو المستقيم نفسه و جميع المستقيمات العمودية عليه.
+ محاور تماثل دائرة هي حاملات أقطارها
+ محاور تماثل زاوية هو حامل منصفها

ب تعريف

نقول إن النقطة I مركز تماثل شكل (F) اذا و فقط اذا كان $S_I\left((F)\right)=(F)$

أمثلة

+ مركز تماثل مستقيم جميع نقطه
+ مركز تماثل دائرة هي دائرته
+ مركز تماثل متوازي الأضلاع هو مركزه

II – التحاكي

1-نشاط

لتكن O و A و B نقط من المستوى
أنشئ O' و A' و B' حيث $\overrightarrow{OA'}=-2\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB'}=-2\overrightarrow{OB}$
نقول ان A' و B' صورتي A و B على التوالي بالتحاكي الذي مركزه O ونسبته -2
أنشئ M' صورة M بالتحاكي الذي مركزه O ونسبته -2
بين أن $\overrightarrow{A'B'}=-2\overrightarrow{AB}$ و استنتج أن $(AB)//(A'B')$

ما هو الوضع النسبي للمستقيمين (AM) و $(A'M')$

2- تعريف

لتكن I نقطة معلومة من المستوى (P) و k عددا حقيقا غير منعدم

العلاقة التي تربط النقطة M بالنقطة M' حيث $\overrightarrow{IM'}=k\overrightarrow{IM}$ تسمى التحاكي الذي مركزه I و نسبته k ونرمز له بالرمز $h(I;k)$ أو h

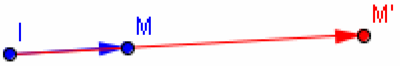
نقول ان النقطة M' صورة النقطة M بالتحاكي M و نكتب $h(M)=M'$ أو $h:M\to M'$

نقول كذلك h يحول M إلى M'

التحاكي h تحويل في المستوى

مثال

أ- h تحاك مركز I و نسبته 3 أنشئ M' صورة M بالتحاكي h



ب- h تحاك مركز I و نسبته $\frac{-1}{2}$ أنشئ M' صورة M بالتحاكي h

ملاحظات

ليكن $h(I;k)$ تحاك حيث $k\neq 0$

* - إذا كان $k=1$ فان $h(I;1)$ يحول كل نقطة إلى نفسها

- إذا كان $|k|\succ 1$ نقول إن $h(I;k)$ " تكبير"

- إذا كان $|k|\prec 1$ نقول إن $h(I;k)$ " تصغير"

*- إذا كان $h(I;k)$ يحول M إلى M' فان I و M و M' نقط مستقيمية

* إذا كان $h(M)=M'$ فان $\overrightarrow{IM'}=k\overrightarrow{IM}$ أي $\frac{1}{k}\overrightarrow{IM'}=\overrightarrow{IM}$ و بالتالي M صورة M' بالتحاكي الذي مركزه I و نسبته $\frac{1}{k}$

* - $h(I)=I$ نقول إن I بالتحاكي $h(I;k)$

- مركز التحاكي هو النقطة الوحيدة الصامدة بهذا التحاكي

2- خاصيات

أ- أنشطة

نشاط1

ليكن $h(I;k)$ تحاك حيث $k\neq 0$ و M و N و M' و N' حيث $h(M)=M'$ و $h(N)=N'$

1- بين أن $\overrightarrow{M'N'}=k\overrightarrow{MN}$ و أن $M'N'=|k|MN$

2- بين أن اذا كان $M\neq N$ فان $M'\neq N'$ و $(MN)//(M'N')$

نشاط2

ليكن $k\in\mathbb{R}^*-\{1\}$ و M و N و M' و N' نقط حيث $\overrightarrow{M'N'}=k\overrightarrow{MN}$

1- بين أن المستقيمين (MM') و (NN') متقاطعين في نقطة I

2- بين أن $\overrightarrow{IM'}=k\overrightarrow{IM}$ و $\overrightarrow{IN'}=k\overrightarrow{IN}$ و استنتج أه يوجد تحاك يحول M و N على التوالي الى M' و N'

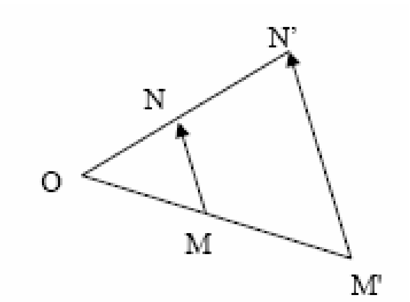
نشاط3

لتكن A ; B ; C ; D نقط من المستوى حيث $\overrightarrow{CD}=\alpha\overrightarrow{AB}$.

نعتبر A' ; B' ; C' ; D' صورها على التوالي بالتحاكي $h(I;k)$ حيث $k\neq 0$

بين أن $\overrightarrow{C'D'}=\alpha\overrightarrow{A'B'}$

ب- الخاصية المميزة



ليكن T تحويل في المستوى و k عدد حقيقي غير منعدم يخالف 1
يكون T تحاك نسبته k إذا و فقط إذا كانت T تحول كل نقطتين M و N من المستوى إلى نقطتين M' و N' حيث $k\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{M'N'}$

نتيجة

اذا كان M و N من المستوى و كان M' و N' صورتيهما على التوالي بتحاك نسبته k غير منعدمة فان $M'N'=|k|MN$

ج- خاصية: المحافظة على معامل الاستقامية

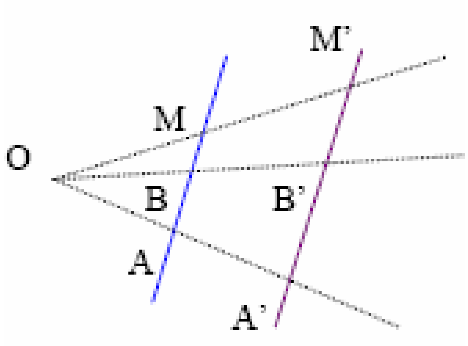
لتكن A ; B ; C ; D نقط من المستوى و A' ; B' ; C' ; D' صورها على التوالي بالتحاكي $h(I;k)$ حيث $k\neq 0$

اذا كان $\overrightarrow{CD}=\alpha\overrightarrow{AB}$ فان $\overrightarrow{C'D'}=\alpha\overrightarrow{A'B'}$

نعبر عن هذا بقولنا التحاكي يحافظ علة معامل استقامية متجهتين

نتيجة

التحاكي يحافظ على استقامية النقط



نتيجة

ليكن h تحاك
إذا كان $h(A)=A'$ و $h(B)=B'$ فان $h((AB))=(A'B')$ و $h([AB))=[A'B')$ و $h([AB])=[A'B']$

نتيجة

ليكن h تحاك
إذا كان I منتصف $[AB]$ و$h(A)=A'$ و $h(B)=B'$ و $h(I)=I'$ فان I' منتصف $[A'B']$

3- صور بغض الأشكال بتحاك

خاصية1

صورة مستقيم (D) بتحاك هو مستقيم (D') يوازيه

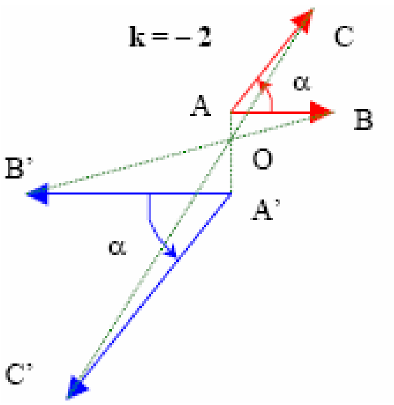
ملاحظة : صورة مستقيم (D) بتحاك مركزه ينتمي إلى (D) هو المستقيم نفسه

خاصية2

ليكن h

إذا كان $h(A)=A'$ و $h(B)=B'$ و $h(C)=C'$ فان $T\left(\widehat{BAC}\right)=\widehat{B'A'C'}$ و $\widehat{BAC}=\widehat{B'A'C'}$

التحاكي يحافظ على قياس الزوايا الهندسية



خاصية3

التحاكي يحافظ على التعامد و التوازي

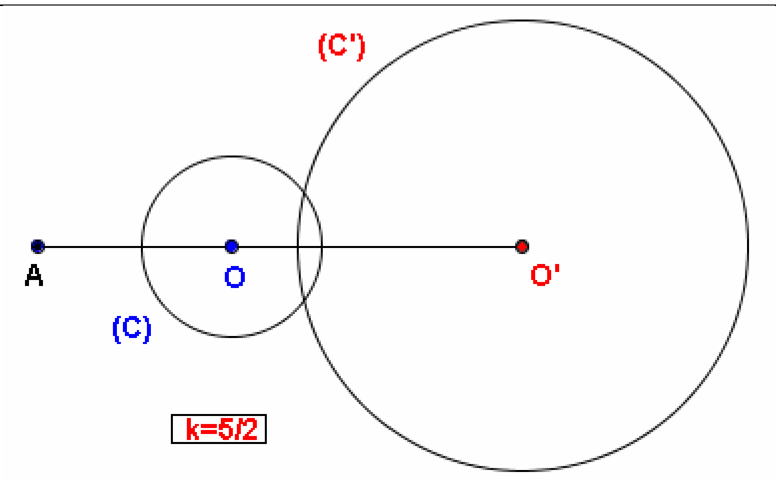
أي صورتا مستقيمان متعامدان هما مستقيمان متعامدان

صورتا مستقيمان متوازيان هما مستقيمان متوازيان

خاصية4

صورة دائرة مركزها O و شعاعها r بتحاك نسبته k هو دائرة مركزها O' صورة O بهذا التحاكي

و شعاعها $|k|r$



خاصية5: صورة مثلث

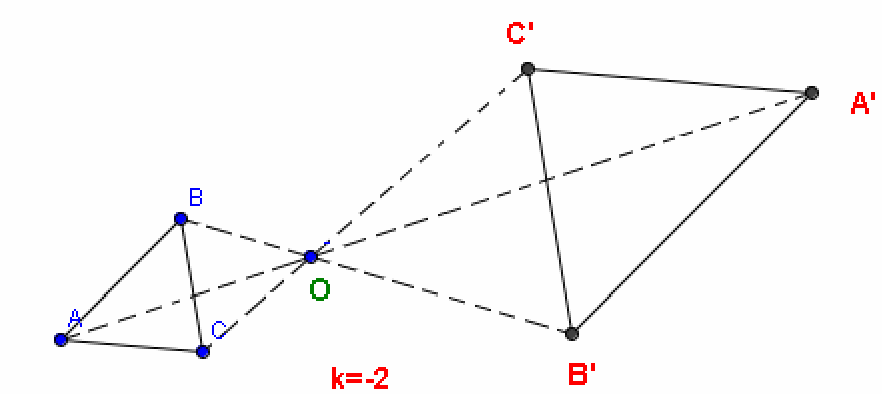
ليكن h نسبته $k \neq 0$

إذا كان $h(A)=A'$ و $h(B)=B'$ و $h(C)=C'$ فان صورة المثلث ABC هو المثلث $A'B'C'$

ملاحظة و اصطلاح :

إذا كان المثلث $A'B'C'$ صورة المثلث ABC بتحاك نسبته k غير منعدمة فان المثلث ABC صورة المثلث $A'B'C'$ بالتحاكي نسبته $\frac{1}{k}$

نقول إن المثلثين ABC و $B'A'C'$ متحاكيان



خاصية6

إذا كان المثلثان $B'A'C'$ و ABC متحاكيان فان $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$

و $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ و $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ و $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$

و $(AB)//(A'B')$ و $(AC)//(A'C')$ و $(CB)//(C'B')$