الجـداء الســلمي

I- الجداء السلمي لمتجهتين

1- تعريف

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من المستوى المتجهي .

الجداء السلمي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ **هو العدد الحقيقي** الذي يُرْمَزُ له بالرمز $\vec{u}.\vec{v}$ والمعرف بما يلي :

- إذا كانت $\vec{u} \neq \vec{0}$ و $\vec{v} \neq \vec{0}$

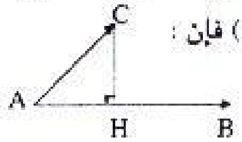
فإن $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\alpha$ حيث α هو قياس لزاوية المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

- إذا كانت $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{v} = \vec{0}$ فإن : $\vec{u}.\vec{v} = 0$

ملاحظات

- الجداء السلمي $\vec{u}.\vec{u}$ يسمى المربع السلمي للمتجهة $\vec{u}$ ويرمز له بالرمز $\vec{u}^2$ ولدينا $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$
- $\overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$
- إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متجهتين غير منعدمتين في المستوى و H هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB) فإن :

$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH}$



2- خاصيات

أ- تماثلية الجداء السلمي

مهما تكن المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ فإن : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

ب- خطانية الجداء السلمي

مهما تكن المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ والعدد الحقيقي λ فإن :

$$\vec{u}\,.\,(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}\,.\,\vec{w}$$
$$(\vec{u}+\vec{v})\,.\,\vec{w} = \vec{u}\,.\,\vec{w} + \vec{v}\,.\,\vec{w}$$
$$(\lambda\vec{u})\,.\,\vec{v} = \lambda(\vec{u}.\vec{v})$$
$$\vec{u}\,.\,(\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u}.\vec{v})$$

ج- متطابقات هامة

مهما تكن المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ فإن :

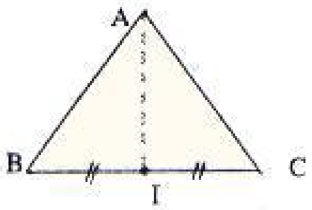
$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{v}^2$$
$$(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{v}^2$$
$$(\vec{u}+\vec{v})\,.\,(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

3- تعامد متجهتين

تكون متجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدتين إذا وفقط إذا كان $\vec{u}.\vec{v} = 0$

II- العلاقات المترية في مثلث

ليكن ABC مثلثا ولتكن I منتصف [BC]



1- مبرهنة الكاشي

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos\hat{A}$$

أي : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$

حالة خاصة : إذا كان ABC قائم الزاوية في A

فإن : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ **(مبرهنة فيتاغورس)**

2- مبرهنة المتوسط

$$AB^2 + AC^2 = 2\,AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$$

3- مساحة مثلث

مساحة المثلث ABC هي :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}AB\,.\,AC\,.\sin\hat{A} = \frac{1}{2}BA.\,BC\,.\,\sin\hat{B} = \frac{1}{2}CA.\,CB.\,\sin\hat{C}$$

نتيجة :

$$\frac{\sin\hat{A}}{BC} = \frac{\sin\hat{B}}{AC} = \frac{\sin\hat{C}}{AB}$$